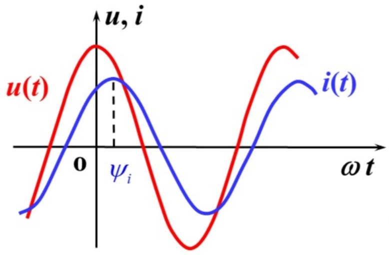
第4章 正弦稳态交流电路

- 4.1 正弦量及其相量表示法
  - **2.参考正弦量**



一旦把某一正弦量选作参考正弦量，其它同频率的正弦量的初相也就相应被确定,图中电流 $i=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\psi_i)$ 其初相为 $-\psi_i$，故 i 的波形图较参考正弦量 u 的波形图沿横轴右移 ψ_i 。

电压 u 通过最大值的瞬间作为时间坐标原点($t=0$),此时 $\psi_u=0$,正弦电压记为

$$u=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t)$$

初相为零的正弦量称为参考正弦量。

  - **3.复数表示法**

正弦电路电压、电流都是随时间按正弦规律变化的函数。在含有电感和(或)电容的正弦电路中，元件方程中含有微积分形式的方程。因此，在时域内对正弦电路进行分析时，需要建立含微积分的电路方程，分析过程如下。

正弦稳态电路 —分析→ **建立电路方程(含微积分方程)** —求解→ **得时域响应表达式**

时域分析过程示意图

思考：正弦函数微积分或几个同频率正弦函数相加减的结果仍是同频率正弦量。能否用一种简单的数学变换方法以避免繁琐的三角函数运算？避免微积分方程运算？

设A是一个复数，可表示为

直角坐标式 $\vec{A}=a+\mathrm{j}b$ （实部 a，虚部 b）

•极坐标式 $\vec{A}=|A|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=|A|(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta)$ （模 $|A|$，辐角 θ）

简写为 $\boxed{\vec{A}=|A|\angle\theta}$

比较两式有

$$a=|A|\cos\theta \qquad |A|=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$b=|A|\sin\theta \qquad \theta=\arctan(b/a)$$

  - **4.正弦的相量表示**

在正弦稳态电路中，各电压、电流都是与激励**同频率**的正弦量。所以在同频条件下，只需要两个要素就可以确定各个正弦量。

如 $u(t)=\boxed{U_{\mathrm{m}}}\cos(\omega t+\boxed{\psi})=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi)$

$$\dot{U}_{\mathrm{m}}=U_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}=U_{\mathrm{m}}\angle\psi$$

最大值相量　　正弦量振幅　　正弦量初相

或 $\dot{U}=U\angle\psi$

相量 $\dot{U}_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}\dot{U}$ 在**分析计算过程中，和一般复数无区别；其区别一般复数之处只在于它代表一个正弦量，**模和辐角分别对应于一个正弦量的振幅和初相。

正弦量一般表达式为：

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$$

设一相量为 $U_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$ ，根据欧拉公式得

$$u(t)=\boxed{U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)}+\mathrm{j}U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi)$$

比较式两式得

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)=\boxed{\mathrm{Re}\left[U_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}\right]}=\mathrm{Re}\left[U_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{U}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

一个正弦量 $f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$ 能够**唯一**地确定其对应的相量 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$

反之，若已知 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 和角频率ω，由 $f(t)=\mathrm{Re}\left[\boxed{A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$

也能**唯一**地确定 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 所代表的正弦量 $f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$

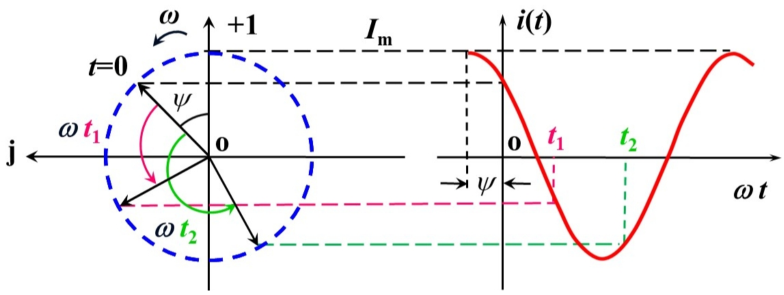
旋转相量

- 1）旋转相量

旋转相量 $I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$ 是复平面内一个模长为I_{m}，初始角度为ψ的相量，其相位$\omega t+\psi$以角速度ω随时间均匀递增的，所以这一有向线段将以原点为圆心，逆时针方向旋转，旋转角速度为ω。

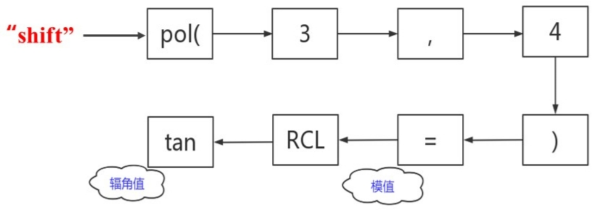
旋转相量—任一时刻该相量在实轴上的投影对应于正弦量在同一时刻的瞬时值。

$I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\bullet\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\ \to\text{旋转因子}}$



使用计算器进行复数变换

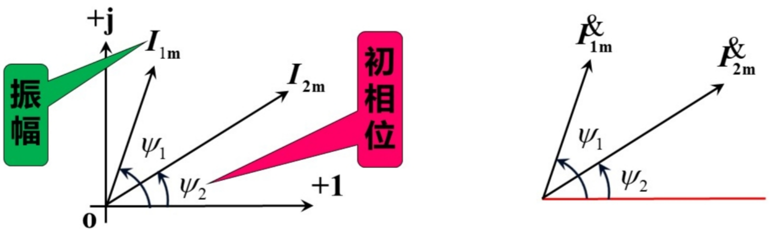
假设已知复数3+j4，现在需要转化为模与辐角的形式：



若已知复数模与辐角，求实部与虚部的形式则在上述过程前面加"shift"按钮，第一次结果为实部，第二次结果为虚部。

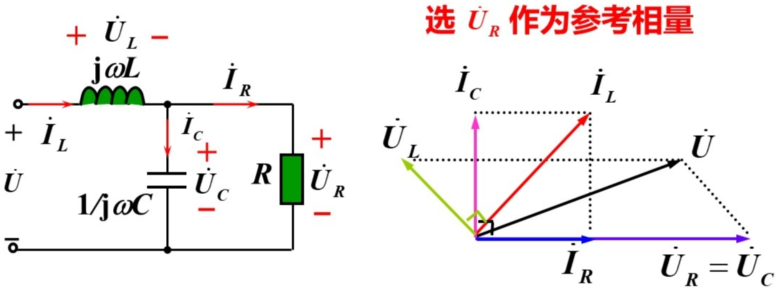
关于相量说明

- **相量是复数常量，而正弦量是关于时间实的、余弦函数，是个变量——相量只是代表正弦量，而不等于正弦量。**
- **相量A还可以用复平面上一定夹角的有向线段**



- 2）相量图（phasor diagram）：一张图上画出若干相量
  - **同频率正弦量的相量，才能表示在同一张相量图中**
  - **选定一个参考相量（设其初相位为零——水平线方向）**

选 $\dot{U}_R$ 作为参考相量



- 4.2 基尔霍夫定律和电路元件方程的相量形式
  - **1.基尔霍夫电流定律方程的相量形式**

在集中参数电路中，任一时刻流出（或流入）任一节点的电流代数和等于零。其时域表示为

$$\sum i = 0$$

当方程中各电流均为同频率的正弦量时，根据相量的惟一性和线性性质，可得基尔霍夫电流定律方程的相量形式

$$\sum \dot{I}_{\mathrm{m}} \equiv 0 \quad \text{或} \quad \sum \dot{I} \equiv 0$$

振幅相量 $\dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \angle \psi$

有效值相量 $\dot{I} = I \angle \psi$

- 2.基尔霍夫电压定律的相量形式

在集中参数电路中，任一时刻沿任一回路各支路电压的代数和等于零。

基尔霍夫电压定律方程的时域形式为

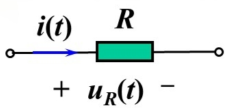
$$\sum u = 0$$

当方程中各电压均为同频率的正弦量时，根据相量的惟一性和线性性质，可得基尔霍夫电压定律方程的相量形式为：

$$\sum \dot{U}_{\mathrm{m}} \equiv 0 \quad \text{或} \quad \sum \dot{U} \equiv 0$$

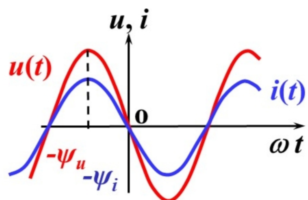
但 $\sum U \neq 0$

- 3.电阻元件

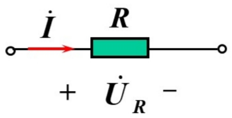


时域模型

$$u_R(t) = Ri(t)$$



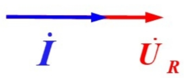
时域波形图



相量(频域)模型

$$\dot{U}_R = R\dot{I}$$

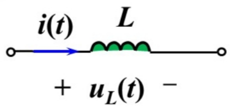
有效值 $U = RI$
相　位 $\psi_u = \psi_i$



相量图

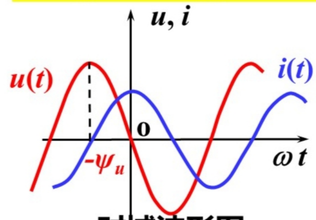
- 4.电感元件

相位关系：
$u(t)$ **超前** $i(t)$ $90°$

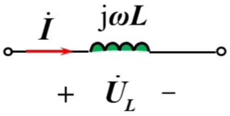


时域模型

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



时域波形图

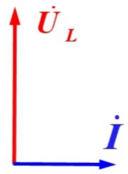


相量(频域)模型

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=\mathrm{j}X_L\dot{I}$$

有效值 $U=\omega LI$

相位 $\psi_u=\psi_i+90°$



相量图

$$\dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I} \longrightarrow U=\omega L I$$

定义： $X_L=U/I=\omega L=2\pi f L$， **单位：欧姆**

称为“感抗”(inductive reactance)

错误的写法

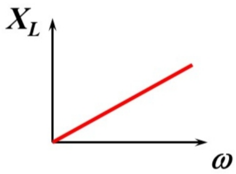
ωL ✗ $\frac{u}{i}$

ωL ✗ $\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$

感抗的物理意义：

(1) 反映了电感对电流具有阻碍的能力；

(2) 感抗与所通过电流的(角)频率成正比（理想元件如此，实际情况复杂）。



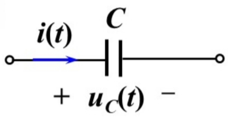
$\omega=0$**(直流)，** $X_L=0$ **(短路)**

$\omega\to\infty$**，** $X_L\to\infty$ **(开路)**

(3) 由于感抗的存在，使电流在相位上落后电压90°。

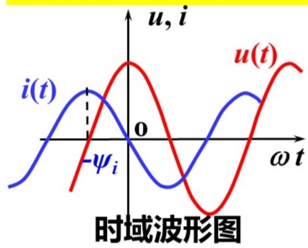
- 5.电容元件

相位关系：
$i(t)$ **超前** $u(t)$ $90°$

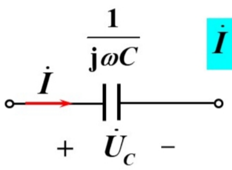


时域模型

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$



时域波形图

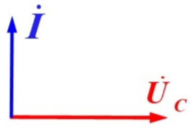


相量(频域)模型

$\dot{I}=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_C$ **或** $\dot{U}_C=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}=-\mathrm{j}X_C\dot{I}$

有效值 $U_C=\frac{1}{\omega C}I$

相位 $\psi_u=\psi_i-90°$



相量图

$$\dot U=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot I \qquad \dot I=\mathrm{j}\omega C\,\dot U$$

错误的写法

$\frac{1}{\omega C}\ \times\ \frac{u}{i}$

$\frac{1}{\omega C}\ \times\ \frac{\dot U}{\dot I}$

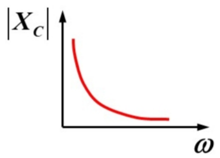
定义：$X_C=U/I=1/\omega C=1/2\pi fC$， 单位：欧姆

称为"容抗"(capacitive reactance)

容抗的物理意义：

(1) **表征电容对电流有阻碍作用；**

(2) **容抗的绝对值与电容电流的(角)频率成反比；**



$\omega=0$ **(直流)，** $|X_C|\to\infty$ **(隔直作用)**

$\omega\to\infty$**，** $X_C\to 0$ **(短路作用)**

(3) **由于容抗的存在，使电流在相位上超前（领先）电压90°。**

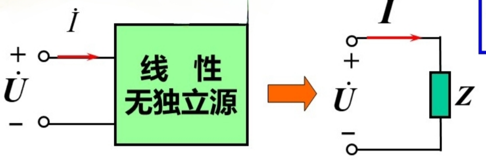
- 4.3 复阻抗和复导纳
  - 1.复阻抗（impedance）

$\dot U=R\dot I$

$\dot U=\mathrm{j}\omega L\dot I$

$\dot U=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I$

正弦激励下



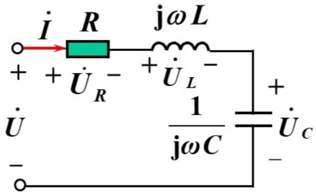
1）复阻抗

$$Z=\frac{\dot U}{\dot I}$$

特殊情况：

纯电阻	$Z_R=R$
纯电感	$Z_L=\mathrm{j}\omega L=\mathrm{j}X_L$
纯电容	$Z_C=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=-\mathrm{j}X_C$

$X_L=\omega L$ **感抗**　　　$X_C=1/\omega C$ **容抗**



***RLC*串联的情况**

根据基尔霍夫电压定律的相量形式，图示电路的端口电压相量方程为

$$\dot U=\dot U_R+\dot U_L+\dot U_C=R\dot I+\mathrm{j}\omega L\dot I+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I$$

$$=[R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})]\dot I$$

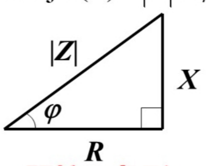
$\dot U=Z\dot I$ → **欧姆定律的相量形式**

复阻抗　**电 阻**　**电 抗**

其中 $Z=R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})=R+\mathrm{j}(X_L-X_C)=R+\mathrm{j}X(\omega)=|Z|\angle\varphi$

$|Z|=\sqrt{R^2+X^2}$ **阻抗的模** **单位：Ω**

$\varphi=\arctan\frac{X}{R}$ **阻抗角**



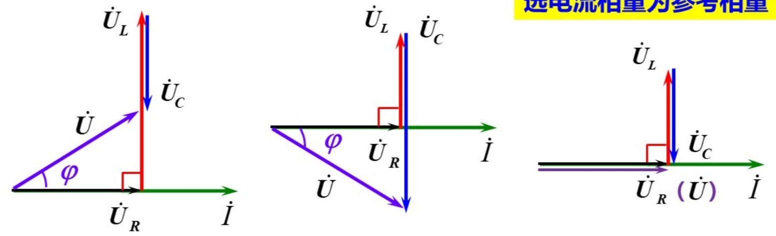
阻抗三角形

又根据 $Z=\dfrac{\dot U}{\dot I}=\dfrac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i}=\dfrac{U}{I}\angle(\psi_u-\psi_i)=|Z|\angle\varphi$

可得 $\begin{cases}|Z|=\dfrac{U}{I}\\ \varphi=\psi_u-\psi_i\end{cases}$ 以及 $\begin{cases}|Z|=\sqrt{R^2+X^2}\\ \varphi=\arctan\dfrac{X}{R}\end{cases}$

2）对*R-L-C* 串联电路模型的具体分析

选电流相量为参考相量



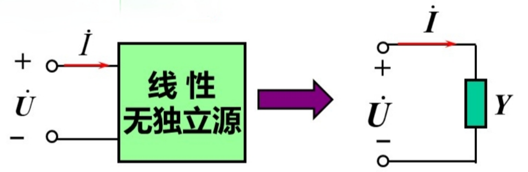
$\varphi>0$，$X>0$，$\omega L>1/\omega C$，电压超前电流，电路呈感性；

$\varphi<0$，$X<0$，$\omega L<1/\omega C$，电压落后电流，电路呈容性；

$\varphi=0$，$X=0$，$\omega L=1/\omega C$，电压与电流同相，电路呈纯阻性。

- 2.复导纳（admittance）

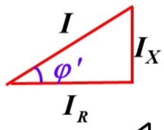
正弦激励下



复导纳：

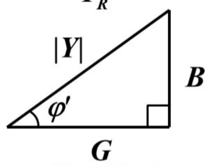
$Y=\dfrac{\dot I}{\dot U}=\underbrace{G}_{电导}+\mathrm{j}\underbrace{B}_{电纳}=|Y|\angle\varphi'$

电流三角形



$\begin{cases}|Y|=\dfrac{I}{U} & 导纳的模 \quad 单位：S\\ \varphi'=\psi_i-\psi_u & 导纳角\end{cases}$

$Y=\dfrac{1}{Z}$



导纳三角形

- 3.阻抗的串、并联

串联 $Z=\sum Z_k$，$\dot U_k=\dfrac{Z_k}{\sum Z_k}\dot U$

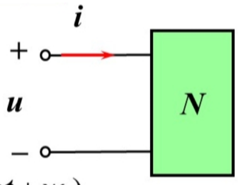
并联 $Y=\sum Y_k$，$\dot I_k=\dfrac{Y_k}{\sum Y_k}\dot I$

- 4.4 正弦稳态电路相量分析
- 4.5 正弦电路的功率

基本要求：了解正弦电路电路瞬时功率的特点；透彻理解平均功率、无功功率、视在功率和功率因数的定义及其计算。

- 1.瞬时功率(instantaneous power)

$$p_{吸} \overset{\text{def}}{=} ui$$　　单位：W（瓦）



一端口网络的端口电压、电流分别为

$$u=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u) \qquad i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

则一端口网络输入的瞬时功率为

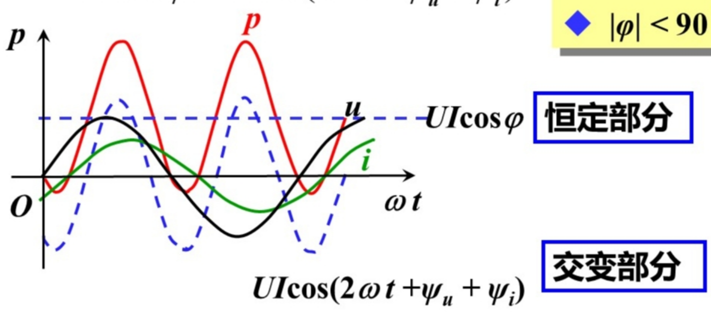
$$p=ui=2UI\cos(\omega t+\psi_u)\cos(\omega t+\psi_i)$$

$$=UI\cos(\psi_u-\psi_i)+UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)$$

$$=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)$$

$$=\underbrace{UI\cos\varphi}_{恒定部分}+\underbrace{UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)}_{交变部分}$$

◆ $|\varphi|<90^\circ$



- 吸收的瞬时功率 $p(t)$有时为正，有时为负；
- $p(t)>0$，电路在相应时间段在吸收功率；
- $p(t)<0$，电路在该时间段在发出功率；
- $p>0$的区域总是大于$p<0$的区域。

$$p=\underbrace{UI\cos(\psi_u-\psi_i)}_{①}+\underbrace{UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)}_{②}$$

①反映一端口网络吸收电能

②反映一端口网络与外部电路交换能量。它在一个周期内的平均值等于零。

- 2.平均功率(average power)

定义：瞬时功率在一个周期内积分的平均值。常以符号P来表示。

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T UI\cos(\psi_u\text{-}\psi_i)\mathrm{d}t \qquad \frac{1}{T}\int_0^T UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)\mathrm{d}t=0$$

$$=UI\cos\varphi$$　　平均功率P的单位也是W（瓦）

其中，$\cos\varphi$称为功率因数；$\varphi=\psi_u\text{-}\psi_i$，称作功率因数角。

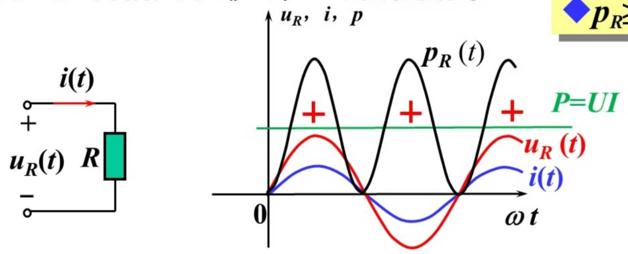
对于无源网络，φ即为其等效阻抗的阻抗角，$|\varphi|\le 90^\circ$，

$0\le\cos\varphi\le 1$。

- 1）正弦稳态下R元件的功率

此时u与i同相，即$\psi_u-\psi_i=0$ 则**瞬时功率**

◆ $p_R\geq 0$



$$p_R=UI\cos(\psi_u-\psi_i)+UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)=UI[1+\cos 2(\omega t+\psi_u)]$$

◆ 瞬时功率的角频率为2ω

电阻的平均功率为

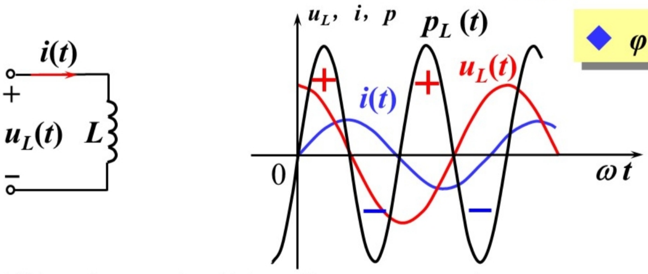
$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p_R \mathrm{d}t=P_R=\frac{1}{T}\int_0^T UI[1+\cos 2(\omega t+\psi_u)]\mathrm{d}t=UI=RI^2=GU^2$$

或 $P=UI\cos\varphi=UI\cos 0^\circ=UI$

- 2）正弦稳态下L元件的功率

此时u超前于i 90° ，即 $\psi_u-\psi_i=90^\circ$ 则**瞬时功率**

◆ $\varphi=90^\circ$



$$p_L=UI\cos(\psi_u-\psi_i)+UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)$$

$$=UI\cos 90^\circ+UI\cos(2\omega t+2\psi_u-90^\circ)]=UI\sin 2(\omega t+\psi_u)$$

◆ 瞬时功率的角频率为2ω

电感的平均功率为

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p_L \mathrm{d}t=P_L=\frac{1}{T}\int_0^T UI\cos 2(\omega t+\psi_u)\mathrm{d}t=0$$

说明:

① 电感吸收瞬时功率是时间的**正弦函数**，其角频率为2ω。

② 因为电感存储磁场能量 $w_L=Li^2/2$ ，

所以$|i|$**增大**时，电感吸收功率，$p_L>0$；

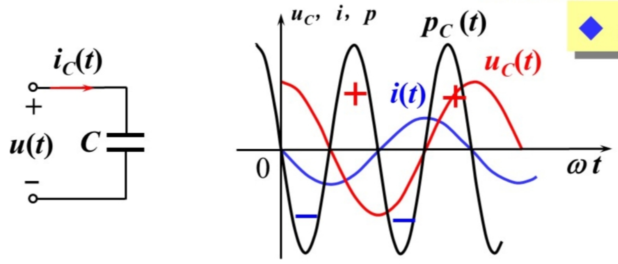
$|i|$**减小**时，电感发出功率，$p_L<0$；

$|i|$**不变**时，电感不消耗功率，$p_L=0$；

③ p_L在一个周期内的**平均值等于零**，即它输入的平均功率为零，表明在一个周期内电感**吸收与释放**的**能量相等**，是**无损元件**。

- 3）正弦稳态下C元件的功率

此时u落后于i 90°，即$\psi_u - \psi_i = -90°$ 则瞬时功率



◆ $\varphi = -90°$

$$p_C = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

$$= UI\cos(-90°) + UI\cos(2\omega t + 2\psi_u + 90°) = -UI\sin 2(\omega t + \psi_u)$$

◆ **瞬时功率的角频率为2ω**

电容的平均功率为

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_C \mathrm{d}t = P_C = \frac{1}{T}\int_0^T -UI\sin 2(\omega t + \psi_u)\mathrm{d}t = 0$$

说明：

① 电容吸收瞬时功率是时间的正弦函数，其角频率为2ω。

② 因为电容存储电场能量 $w_C = Cu^2/2$ ，

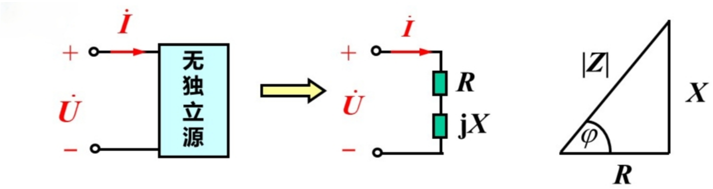
所以$|u|$增大时，电容吸收功率，$p_C > 0$；

$|u|$减小时，电容发出功率，$p_C < 0$；

$|u|$不变时，电容不消耗功率，$p_C = 0$；

③ p_C在一个周期内的平均值等于零，即它输入的平均功率为零，表明在一个周期内电容吸收与释放的能量相等，是无损元件。

- 总结



$$P = UI\cos\varphi = |Z|\ I\ I\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$$

功率因数 $\cos\varphi$ $\begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$

平均功率就是消耗在电阻上的功率。

有功功率(active power)

一般地，$0 \le \cos\varphi \le 1$

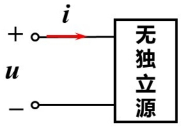
$X > 0$，$\varphi > 0$，**感性**

$X < 0$，$\varphi < 0$，**容性**

网络中电阻元件吸收电能的能力

- 3.无功功率(reactive power)

瞬时功率的另一种分解方法



$$p(t)=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)$$

$$=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+2\psi_u-\varphi)$$

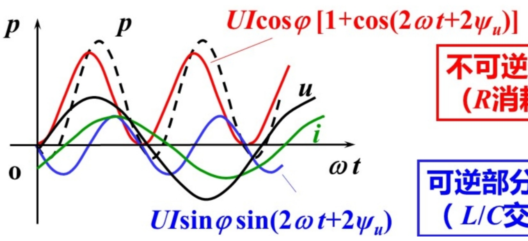
第1种

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=UI\cos\varphi+UI\cos\varphi\cos(2\omega t+2\psi_u)+UI\sin\varphi\sin(2\omega t+2\psi_u)$$

$$=UI\cos\varphi[1+\cos(2\omega t+2\psi_u)]+UI\sin\varphi\sin(2\omega t+2\psi_u)$$

第2种



- 1）定义

$$p=UI\cos\varphi[1+\cos(2\omega t+2\psi_u)]+\boxed{UI\sin\varphi}\sin(2\omega t+2\psi_u)$$

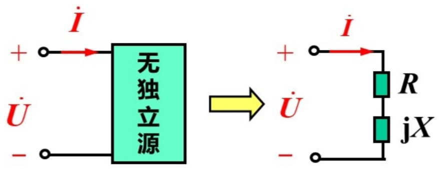
1）定义

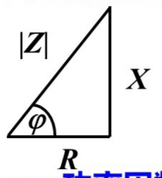
$$Q\overset{\text{def}}{=}UI\sin\varphi$$

单位：VAR (乏)

$$=|Z|\,I\,I\sin\varphi=I^2|Z|\sin\varphi=I^2X$$

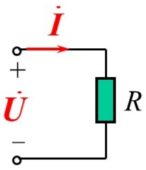
无功功率就是在电抗和外电路交换的功率



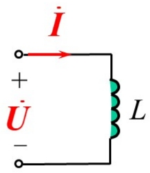


$\varphi=\psi_u-\psi_i$ 功率因数角

- 2）R、L、C元件吸收的无功功率

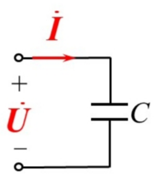


$$Q_R=UI\sin\varphi=UI\sin 0^\circ=0$$



$$Q_L=UI\sin\varphi=UI\sin 90^\circ=UI=U^2/X_L=I^2X_L>0$$

L吸收无功功率



$$Q_C=UI\sin\varphi=UI\sin(-90^\circ)$$

$$=-UI=-U^2/X_C=-I^2X_C<0$$

C发出无功功率

- 3）无功功率的物理意义

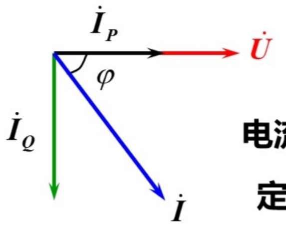
衡量网络中电抗元件与外界进行能量交换的能力。

一端口吸收的平均功率为 $P=UI\cos\phi=UI_P$

感性一端口相量图如图所示。

$I_P=I\cos\phi$

电流有功分量



电流的无功分量表示为I_Q——$I\sin\varphi$

定义无功功率 $Q=UI_Q=UI\sin\phi$

- 4.视在功率(apparent power)

定义： $S \overset{\text{def}}{=} UI$

单位： VA（伏安）

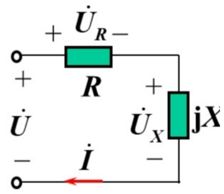
衡量发电设备或供电设备的容量（例如发电机的发电容量）

有功功率、无功功率与视在功率的关系

视在功率：$S=UI=\sqrt{P^2+Q^2}$ 单位：VA

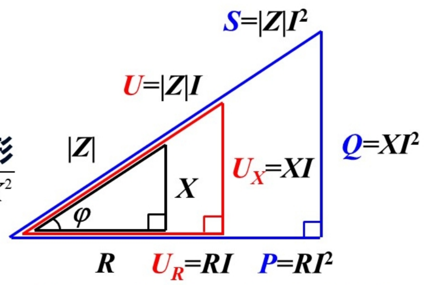
有功功率：$P=UI\cos\varphi=S\cos\varphi$ 单位：W

无功功率：$Q=UI\sin\varphi=S\sin\varphi$ 单位：var



$$\varphi=\arccos\frac{P}{S}$$

※三个三角形相似

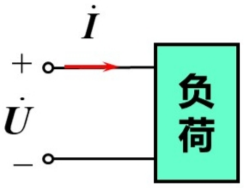


阻抗三角形 $|Z|=\sqrt{R^2+X^2}$

$U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}$ 电压三角形　　功率三角形 $S=\sqrt{P^2+Q^2}$

φ被称为复阻抗的阻抗角；电压与电流的相位差；功率因数角

- 5.复（数）功率(complex power)



$$\dot{U}=U\angle\psi_u\ ,\qquad \dot{I}=I\angle\psi_i$$

$$P=UI\cos(\psi_u-\psi_i)$$

$$=UI\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_u-\psi_i)}]$$

$$=\mathrm{Re}[\underbrace{U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}}_{\dot{U}}\ \underbrace{I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_i}}_{\overset{*}{I}}]$$

$$P=\mathrm{Re}[\dot{U}\overset{*}{I}]\qquad Q=\mathrm{Im}[\dot{U}\overset{*}{I}]$$

记 $\bar{S}=\dot{U}\overset{*}{I}$ 称为复功率，单位:VA[伏安]

$$\bar{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=UI\angle(\psi_u-\psi_i)=UI\angle\varphi\ =S\angle\varphi$$

$$=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi=P+\mathrm{j}Q$$

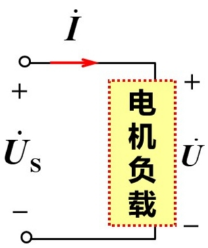
复功率守恒

$$\sum_{k=1}^{b}\bar{S}_k=\sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\overset{*}{I}_k=\sum_{k=1}^{b}P_k+\mathrm{j}\sum_{k=1}^{b}Q_k=0$$

其中实部代数和等于零表明：各电源发出的有功功率之和等于各负载吸收的有功功率之和；

而虚部代数和等于零表明：各电源 “发出” 的无功功率代数和等于各负载“吸收”的无功功率代数和。

- 6.功率因数的提高



设： 电源电压有效值 $U_S=10\mathrm{V}$，

负荷吸收的有功功率 $P=10\mathrm{W}$（恒定）。

◆ $\cos\varphi=1$	$I=1\mathrm{A}$
◆ $\cos\varphi=0.5$	$I=2\mathrm{A}$
◆ $\cos\varphi=0.1$	$I=10\mathrm{A}$

$$\boxed{P=UI\cos\varphi}$$

功率因数低带来的问题：

负载吸收相同有功功率时：(1)对电源提供能量的需求增加；
(2)进而使传输电能、连接设备线路上的损耗随之增大。

以异步电机为例：空载 $\cos\varphi=0.2\sim0.3$
满载 $\cos\varphi=0.7\sim0.85$

需要提高功率因数！

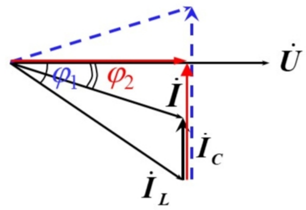
补偿容量的确定

$$I_C = I_L\sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P}{U\cos\varphi_2} \\ I_L &= \frac{P}{U\cos\varphi_1} \end{aligned}\right\} \text{代入上式}$$

$$I_C = \frac{P}{U}(\tan\phi_1 - \tan\phi_2)$$

$$\therefore\quad C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\phi_1 - \tan\phi_2)$$

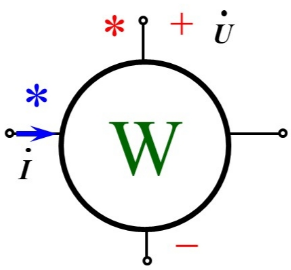


补偿容量不同 { 欠补偿 / 全补偿 / 过补偿

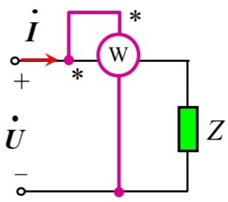
实际实施 { 性能 / 成本　　一般补偿到$\cos\varphi=0.95$(落后)

- 7.有功功率的测量

功率表



1) 功率表接线：如果接线方式是使得电流从“*”端流入；电压线圈的“*”端接负载电压的正端→则功率表的示值反映的即为$UI\cos(\psi_u-\psi_i)$

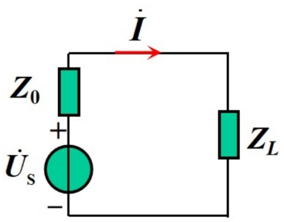


对于图示接法来说，该示值即为负载吸收的有功功率

2) 功率表量程：测量有功功率时，P、U、I均不能超量程。

- 4.6 最大功率运输
  - 1.最大功率传输（maximum power transfer）

正弦稳态电路中负载获得最大有功功率$P_{\max}$的条件



$$Z_0 = R_0 + jX_0\,,\quad Z_L = R_L + jX_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_0 + Z_L}$$

$$I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}}$$

负载吸收的有功功率 $P = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}$

  - 2.最佳匹配（conjugate matching）

负载吸收的有功功率 $P = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2}$

$Z_L = R_L + jX_L$，实部虚部可任意改变（分两步进行分析）

先讨论X_L改变时，P的极值

当$X_0 + X_L = 0$，即$X_L = -X_0$时，P获得极值 $P = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_0 + R_L)^2}$

再讨论R_L改变时，P如何取得的最大值

$X_L = -X_0$条件下，当$R_L = R_0$时，P获得最大值(似直流电路)

$$P_{max} = \frac{U_S^2}{4R_0}$$

共轭匹配

负载上获得最大功率的条件是 $Z_L = \overset{*}{Z}_0$，即 $\begin{cases} R_L = R_0 \\ X_L = -X_0 \end{cases}$

又称为最佳匹配。

当负载获得最大功率时，电能的利用率只有50%．

- 3.模匹配（mode matching）

当负载阻抗 $Z_L = |Z_L| e^{j\varphi_L}$ 的模 $|Z_L|$ 可以改变，而阻抗角 φ_L 不能改变时，负载从给定电源获得最大功率的条件是:

负载阻抗模与电源内阻抗模相等,即

$$|Z_L| = |Z_0|$$

获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2 \cos\varphi_L}{2|Z_0|[1 + \cos(\varphi_S - \varphi_L)]}$$

例如，当电源内阻抗为 $Z_0 = R_0 + jX_0$

纯电阻负载获得最大功率的条件是 $R_L = |Z_0|$

如果电源内阻抗也是纯电阻，即 $Z_0 = R_0$

电阻负载获得最大功率的条件则是 $R_L = R_0$